



## Inleiding

Excel heeft random getallen generator, die getallen trekt uit enkele verdelingen. Deze functie wordt vooral gebruikt om statistische berekeningen na te bootsen. De aanname hierbij is, echter, dat deze generator correct werkt en ook daadwerkelijk steekproeven trekt uit de verdeling naar keuze. Als men deze generator zou willen testen is echter aan te nemen dat een test, gebruik makend van de uniforme verdeling, ook geldt voor alle verdelingen. Dit komt doordat de simulaties van de andere verdelingen gebaseerd zijn op simulaties uit deze uniforme verdeling.

De uniforme verdeling is een verdeling waarbij de kansverdeling gelijk is voor elke waarde in de verdeling. De kans om een willekeurig getal te genereren is dus gelijk voor elk denkbaar getal binnen de verdeling. Deze verdeling is dan ook in dit experiment gebruikt om de random generator te toetsen. Onder  $H_0$  wordt verwacht dat de getallen de uniforme verdeling volgen met  $\alpha=.05$  en onafhankelijk van elkaar zijn. Onder  $H_a$  is dit niet het geval.

Hierna is de generator gebruikt, met een normale en log-normale verdeling, om te kijken naar de robuustheid van de F-toets door de type I fout te bepalen bij verschillende verdelingen (normaal en log-normaal). Onder  $H_0$  wordt verwacht dat bij de F-toets  $\alpha=.05$ . Onder  $H_a$  wordt verwacht dat  $\alpha>.05$ .

## Methode

### *Uniforme verdeling*

Om de random generator van Excel te kunnen testen zijn 100 steekproeven getrokken met  $n=100$  uit de uniforme verdeling met waarden tussen 0 en 1. Om te toetsen of deze steekproeven daadwerkelijk uit de uniforme verdeling komen werden ze verdeeld in tien klassen, waarna de frequentie voor elke klasse is bepaald. De verwachte frequentie voor elke klasse is 10, aangezien de uniforme verdeling gelijke kansen bevat voor elke waarde. Hierop is een  $\chi^2$  toets uitgevoerd. Aangezien dit 100 keer is herhaald is de power flink verhoogd. Om de geobserveerde  $\alpha$  te kunnen bepalen zijn veel waarden nodig, hier is gekozen voor 100. Er werd geteld hoeveel keer van deze 100 er een significant verschil is gevonden. Dit werd verwacht in 5% van de gevallen, aangezien  $\alpha$  op .05 is gesteld. Hierna werd de gevonden  $\alpha$  getoetst aan de verwachte met een z-toets voor proporties. Dit werd herhaald met 10 klassen met een steekproefgrootte van 1000, 20 klassen met  $n=100$  en 20 klassen met  $n=1000$ .

### *Autocorrelatie.*

Hierna werd getoetst of getrokken waarden uit de normale verdeling onafhankelijk van elkaar getrokken worden, oftewel random. Hier kan de normale verdeling gebruikt worden, aangezien in het eerste deel bewezen wordt dat de uniforme daadwerkelijk gebruikt werd. Aangezien de normaalverdeling hieraan afhankelijk is, geldt dit hier ook voor. Onder de  $H_0$  geldt dat de random generator van Excel ook daadwerkelijk onafhankelijke getallen trekt. Onder  $H_a$  geldt dit niet.

Dit wordt gemeten door een serie random getrokken getallen te auto-correleren. Een kolom van duizend willekeurig getrokken getallen wordt gekopieerd en wordt een rij lager en een kolom opzij geplaatst. Het resultaat was 99 kolomen met 900 getallen die naast een ander getal uit de zelfde willekeurig trekking staan. Met de correlatiefunctie wordt de eerste kolom vergeleken met de kolom ernaast. Dit heet een eerste orde autocorrelatie. De eerste kolom wordt ook vergeleken met de derde kolom (2<sup>o</sup> Order), en dit voor alle 99 kolomen.

De autocorrelatie waarden worden geplot tegen de order van die waarden. (zie figuur 1). Aangezien de waarden uit de normale verdeling komen, zijn ook deze correlaties normaal verdeeld met een verwachtingswaarde 0 en variantie  $1/n$ . De boven en onder grens van het kritieke gebied wordt berekend door  $\pm 2/\sqrt{n}$ .

In figuur 2 worden de autocorrelatie waarden van laag naar hoog geordend en op een normal-quantile plot uitgezet tegen n-scores.

Nadat is aangetoond dat de random generator daadwerkelijk de uniforme verdeling gebruikt en onafhankelijke waarden trekt, kan de random getal generator aangenomen worden als betrouwbaar. Deze werd gebruikt om de robuustheid van de F-toets te toetsen.

Om dit te doen werden 100 steekproeven getrokken uit de normaalverdeling ( $M=0$   $s=1$   $n=100$ ). Hierna werden deze waarden getransformeerd tot een log-normale verdeling (exponenten van elke waarde,  $e^x$ ). De varianties van de steekproeven binnen de twee verdelingen (normaal-normaal en log-normaal-log-normaal) werden vergeleken met F-toetsen.

De verwachting hier is dat de F-toetsen in 5% van de gevallen een significant verschil vinden in de varianties tussen normale verdelingen ( $\alpha = .05$ ). De verwachting van de type I fout van F-toetsen die de log-normale verdelingen gebruiken is hoger dan 5%, aangezien aangenomen wordt dat F-toetsen niet mogelijk zijn, of in ieder geval niet nauwkeurig, bij niet-normaal verdeelde data.

Getoetst wordt hiermee dus of deze F-toetsen ook in 5% van de gevallen een verschil vinden ( $H_0$ ) of in meer gevallen ( $H_a$ ). Oftewel: de type I fout, de kans om  $H_0$  te verwerpen terwijl deze toch waar is, is 5% onder  $H_0$  en groter onder  $H_a$ . Dit werd gedaan met een z-toets voor proporties.

## Resultaten

### *Uniforme verdeling*

Honderd trekkingen met  $n=100$ ,  $n=1000$ ,  $k=10$  en  $k=20$  resulteerden in alle 4 de combinaties geen significant verschil van  $\alpha$  op, zie tabel 1. Het kritieke gebied van  $\alpha$  omslaat het interval  $[-.0073, 0.093]$ .

Tabel #1: Frequentie observed en expected  $\chi^2$  waarden waarvoor geldt  $p < .05$

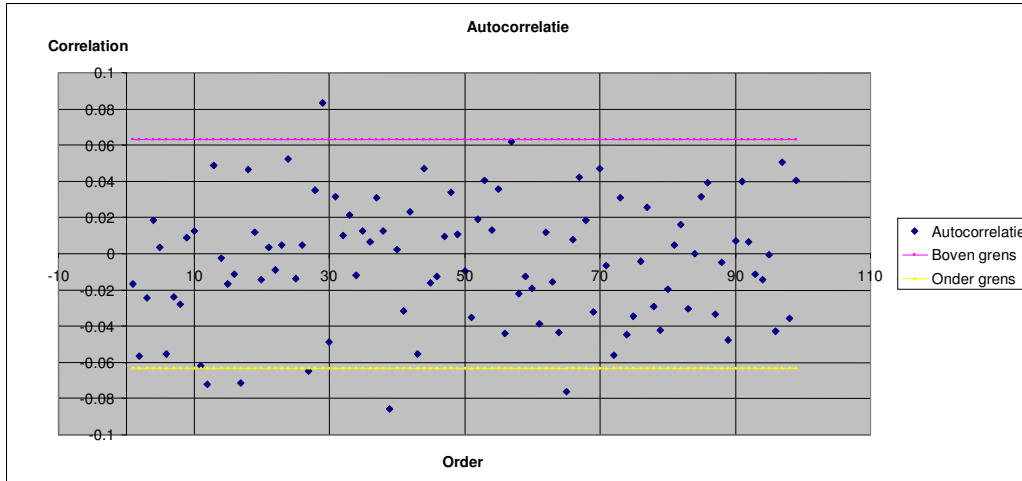
	$\alpha$ observed	ZObserved	P
n=100 k=10	.04	-0.46	.65
n=1000 k=10	.05	0	1
n=100 k=20	.07	0.92	.36
n=1000 k=20	.05	0	1

Dus kan hiermee de nulhypothese dat de random uniforme getal generator van Excel daadwerkelijk getallen trekt uit de uniforme verdeling niet worden verworpen. Er is geen significante afwijking van de uniforme verdeling aangetoond. Het feit dat met een grotere steekproefgrootte de  $\alpha$  dichterbij de verwachte waarde van 0.05 brengt

komt door een grotere power. Ook al hoort een vergroting van het aantal klassen dit ook teweeg te brengen, is dit hier niet het geval.

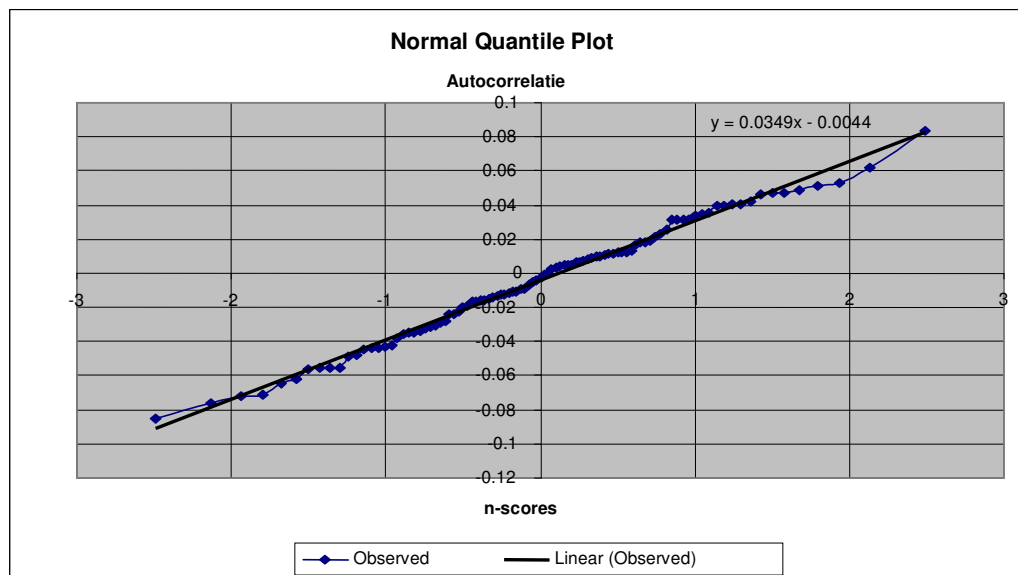
### Autocorrelatie

Van de 99 autocorrelatie waarden vallen 6 in het kritieke gebied. Dit is niet significant verschillend met de verwachte 5 gevallen ( $z=.46$   $p=.64$   $n=99$ ). Er blijken aan de onderkant meer waarden buiten het 95% betrouwbaarheids interval te vallen dan aan de bovenkant. Al is dit punt vreemd, toch blijft de totale  $\alpha$  hierdoor onveranderd.



Figuur 1: Scatterplot van de verdeling van autocorrelaties rond 0 met kritieke gebied gemarkeerd

Als controle of de willekeurige getallen werkelijk een normale verdeling volgen werden de autocorrelatie waarden uitgezet tegen de n-scores

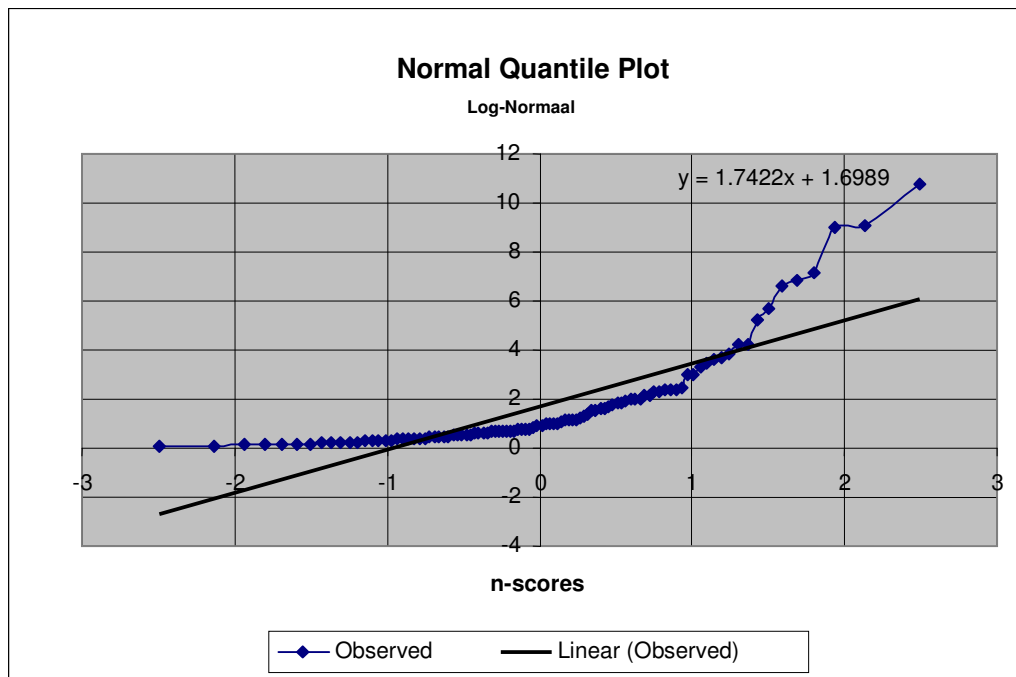


Figuur 2: Normal quantile plot van de autocorrelaties ( $R^2 = .99$ )

Aangezien de lijn in het normal quantile plot de lineaire verwachtingslijn sterk benadert met een  $R^2$  van .99 (99% van de variantie wordt dus verklaard door de lijn) en het feit dat hij de oorsprong (0,0) snijdt laat zien dat de data als normaal verdeeld beschouwd kan worden met verwachtingswaarde 0. De standaard deviatie van de afstand tussen de lijnen is klein ( $s=0.033$ ).

#### Controle van de F-toets

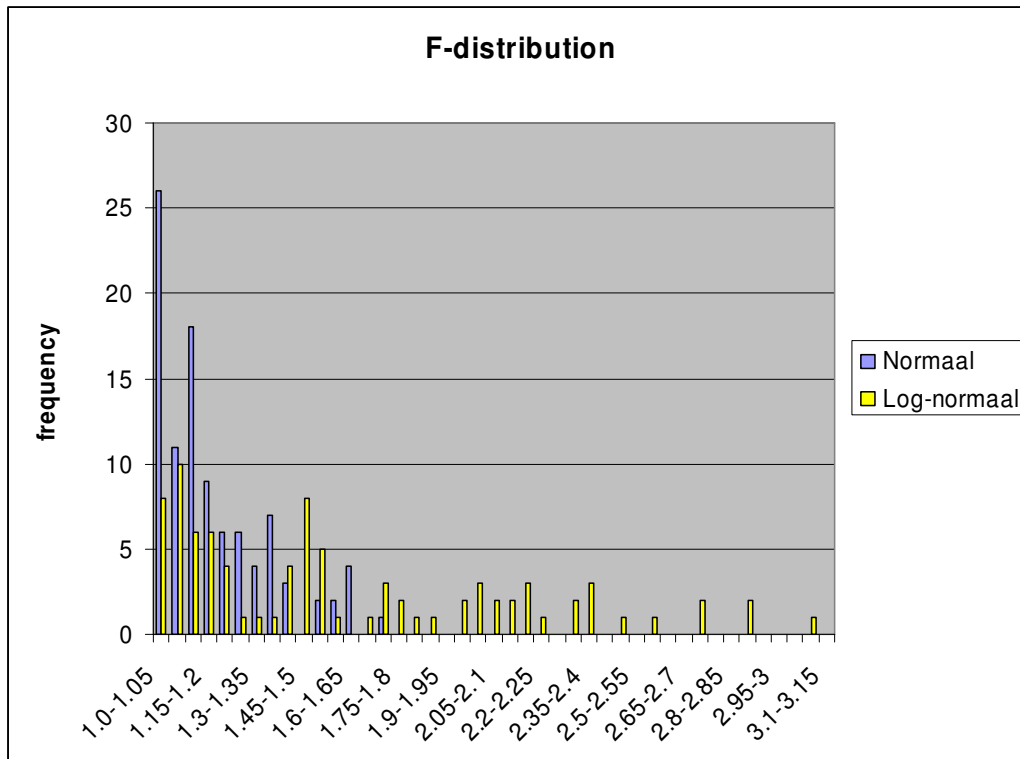
Honderd trekkingen met een normale verdeling ( $M=0$   $s=1$   $n=100$ ) werden getransformeerd tot een log-normale verdeling ( $e^x$ ). Deze log-normaal verdeelde getallen werden uitgezet tegen n-scores. Als de verkregen grafiek lineair zou zijn en door de oorsprong gaat kan worden geconcludeerd dat het een normale verdeling is. In figuur 3 is te zien dat dit niet het geval is ( $R^2=.70$ ). De standaard deviatie van de afstand tussen de twee lijnen is veel groter dan bijvoorbeeld die van de correlaties ( $s=1.13$ ). Dus kan hieruit niet geconcludeerd worden dat de log-normale verdeling als normaal verdeeld beschouwd kan worden.



Figuur 3. Normal quantile plot van de log-normale verdeling ( $R^2=.70$ )

F-toetsen tussen normaal verdeelde getallen leverde een  $\alpha$  van .08 op. Een z-toets voor proporties toonde aan dat dit verschil niet significant is ( $z=1.37$   $n=100$   $p=.084$ ). De F-toetsen tussen log-normaal verdeelde getallen leverde een  $\alpha$  van .52 op. Dit is zeer duidelijk niet significant ( $z=21.57$   $n=100$   $p<.0001$ ).

Het verschil in de distributie tussen de F-waarden van de normale en log-normale data is te zien in figuur 4. Duidelijk te zien is dat de log-normale verdeling sterk afwijkt van de normale en een grotere range heeft dan de normale F-waarden.



Figuur 4: Verdeling van de F-waarden van de normale en log-normale data

## Conclusie

Uit de gedane experimenten kan worden geconcludeerd dat de random generator van Excel volledig willekeurige getallen trekt uit een uniforme verdeling. Bij alle vier de condities viel de gevonden waarde van  $\alpha$  binnen het betrouwbaarheids interval en was er dus geen rede te twijfelen aan de uniforme verdeling van de getallen. Een autocorrelatie test met random getrokken getallen uit een normale verdeling gaf daar ook geen aanleiding toe, aangezien deze correlaties ook normaal verdeeld waren met verwachtingswaarde 0. Dus als je deze twee bewezen feiten samen neemt kun je concluderen dat de excel random getallen generator onafhankelijke getallen trekt uit de verdeling naar keuze.

De uitkomst dat de random generator goed werkt maakt het mogelijk voor ons om door te gaan met het bekijken van de F-toets.

De F-toets mag in theorie alleen op normaal verdeelde data toegepast worden. Bij een analyse het gedrag van F-toetsen met vergelijking tussen log-normaal verdeelde data blijkt hij een  $\alpha$  van 0.52 te hebben wat zeer sterk afwijkt van 0.05 ( $z=21.57$   $n=100$   $p<.0001$ ). De F-toets is dus niet robuust genoeg voor het analyseren van log-normaal verdeelde data.

## Journal

### *Maandag 20-02-'06*

Er was om 9h in de ochtend in T437 afgesproken. We begonnen met het lezen van de net in het weekend toegevoegde literatuur. Daarna begonnen we samen in Excel de opdrachten 1A over Random Generator te maken. Menno deed de eerste helft van 1A, terwijl Klaas tegelijkertijd begon het tweede deel. We waren hier ongeveer om 16 in de middag mee klaar.

### *Dinsdag 21-02-'06*

Weer werd er om 9h afgesproken in de computerzaal. Deze keer maakte we de opdracht 1B over de robuustheid van de F-toets samen. Om ongeveer 16:15 waren wij klaar en gingen naar huis.

### *Woensdag 22-02-'06*

Omdat de Excel opdrachten af en begrepen zijn is woensdag in zijn geheel besteed aan het schrijven van het verslag. Menno begon met de inleiding, Klaas met de resultaten. De methode is samen geschreven. Hierna is ook samen de conclusie gevormd. Om 16:30 was dit afgerond.

### *Donderdag 23-02-'06*

Het verslag werd nog een keer nagelezen alvorens ingeleverd te worden.